Übungsklausur Exponentialfunktion (Fallschirmspringer)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Bestimme die erste Ableitung der Funktion g.

   a) $g(x)=\frac{1}{2}x^3\cdot e^{-4x}$ b) $g(x)=(5x-e^{-x})^2$

2) Gib eine Stammfunktion der Funktion $f(x)=1+\frac{8}{e^{3x}}$ an.

3) Löse die Gleichung.

   a) $e^{3x}=7e^x$ b) $e^x-\frac{7}{2}=\frac{11}{e^x}$

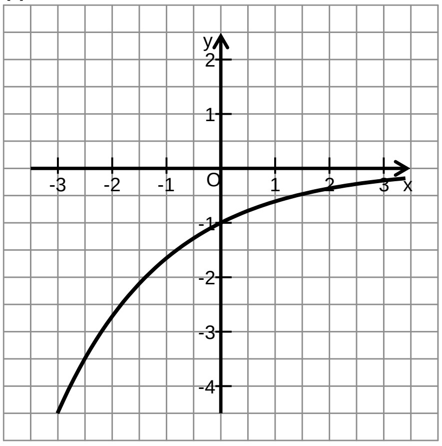
4) Berechne das Integral $\int_1^e\left(x+\frac{5}{x}\right)dx$ und vereinfache soweit wie möglich.

5) a) Bestimme die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)=e^{x+1}$ im Punkt (0|e).
   b) Diese Tangente schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
   Berechne deren Inhalt.

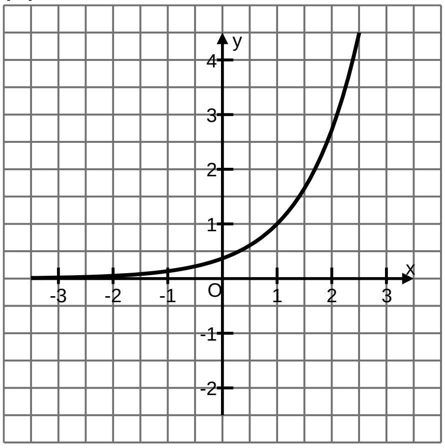
6) Welcher Funktionsterm gehört zu welchem Schaubild? Begründe Deine Entscheidung.
   Beschreibe mit eigenen Worten, wie der fehlende Funktionsgraph der vierten Funktion aus dem Schaubild der Funktion $f(x)=e^x$ hervorgeht.

   a) $f(x)=-e^x-2$ b) $g(x)=-e^{-\frac{1}{2}x}$ c) $h(x)=x\cdot e^x$ d) $i(x)=e^{x-1}$

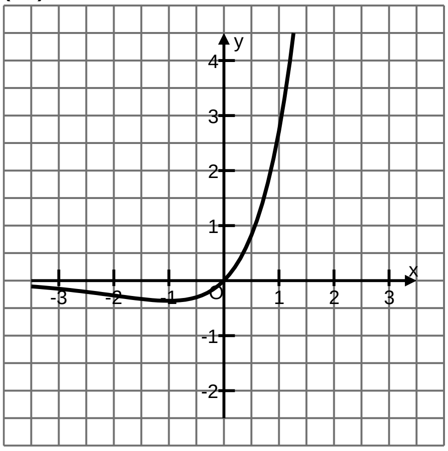
(I)



(II)



(III)

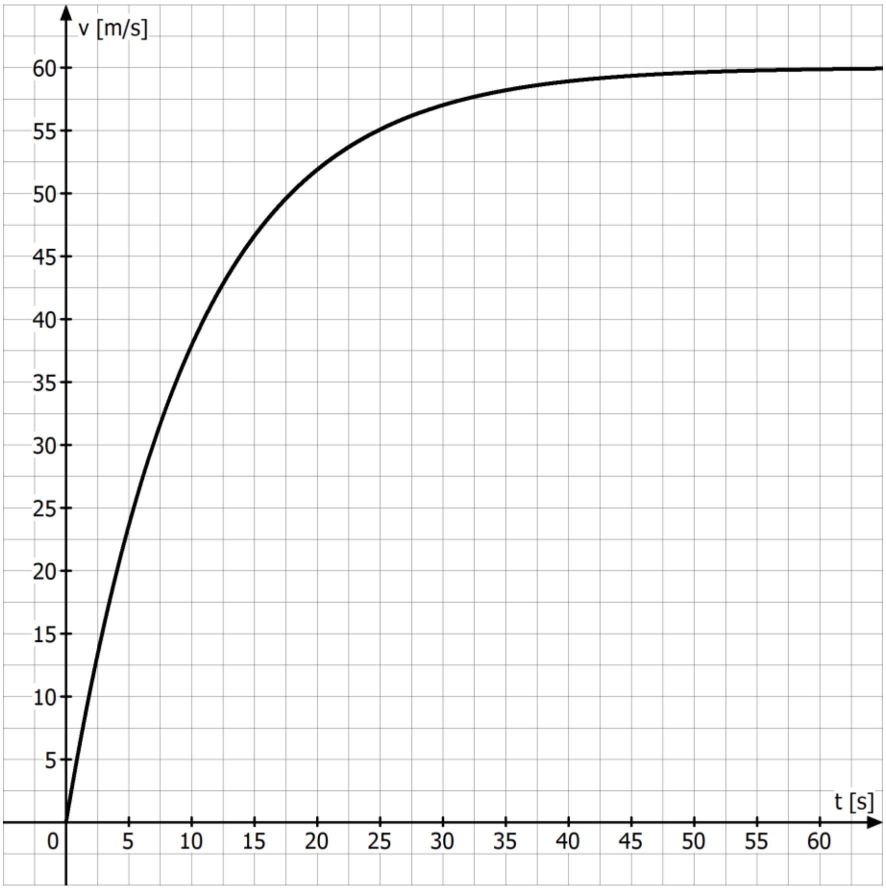


Übungsklausur Exponentialfunktion (Fallschirmspringer) Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Die Fallschirmspringerin Marie springt in der Höhe von 8km aus einem Flugzeug ab. Die Fallgeschwindigkeit einer Springerin in Abhängigkeit von der Zeit wird
durch die Funktion v(t) beschrieben: $v(t) = 60 \cdot \left(1 - e^{-0{,}1t}\right)$

(Zeit t in Sekunden nach dem Absprung, Geschwindigkeit v in $\frac{m}{s}$).

Physikalischer Hintergrund:
Beschleunigung: a(t)
Geschwindigkeit: v(t)
Strecke: s(t)
Zusammenhang:
$a(t) = v'(t) = s''(t)$



a) (1) Ermittle mit Hilfe des Graphen, welche Fallgeschwindigkeit Marie nach 10 Sekunden hat.
   (2) Welche Endgeschwindigkeit erreicht sie?
   (3) Zeige rechnerisch, dass die Geschwindigkeit der Springerin ständig zunimmt.
   (4) Welche Beschleunigung erfährt Marie nach 4 Sekunden?
   (5) Wann ist die Beschleunigung am größten? Wie groß ist sie dann?

b) Marie fällt 2 Minuten ohne Fallschirm, dann öffnet sie ihren Fallschirm.
   Die Sinkgeschwindigkeit nach Öffnen des Schirms wird durch die Funktion
   $v_2(t) = 55 \cdot e^{-0{,}1(t-120)} + 5$ beschrieben (v_2 in m/s, t in Sekunden seit dem Absprung)
   (1) Welche Sinkgeschwindigkeit hat Marie 10 Sekunden nach Öffnen des Fallschirms?
   (2) Wie groß ist die maximale Sinkgeschwindigkeit mit geöffnetem Fallschirm?
   (3) In welchem Zeitraum während des gesamten Sprungs ist Maries Sinkgeschwindigkeit größer als $50\frac{m}{s}$?

c) Auf welcher Höhe ist Marie nach einer Flugzeit von 1 Minute?

Übungsklausur Exponentialfunktion (Fallschirmspringer)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $f'(x)=\frac{3}{2}x^2\cdot e^{-4x}+\frac{1}{2}x^3\cdot e^{-4x}\cdot(-4)$

b) $f(x)=2\cdot\left(5x-e^{-x}\right)\cdot\left(5+e^{-x}\right)$

2) $F(x)=x-\frac{8}{3}e^{-3x}$

3) a) $e^{3x}=7e^x \Leftrightarrow e^{3x}-7e^x=0 \Leftrightarrow e^x(e^{2x}-7)=0$

$e^x=0$ oder $e^x=7$

k. L., $e^x>0$ für alle x $\boxed{x=\frac{\ln 7}{2}}$

b) $e^x-\frac{7}{2}=\frac{11}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x}-\frac{7}{2}e^x-11=0$ Subst.: $u=e^x$

$u^2-\frac{7}{2}u-11=0 \Rightarrow u_{1/2}=\frac{7}{4}\pm\sqrt{\frac{49}{16}+\frac{176}{16}}=\frac{7}{4}\pm\frac{15}{4}$

$u_1=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}$ oder $u_2=-2$

Rücksubst.: $e^x=\frac{11}{2}\Rightarrow \boxed{x=\ln\frac{11}{2}}$ $e^x=-2$ k. L., da $e^x>0$ für alle x

4) $\int_1^e\left(x+\frac{5}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+5\ln(|x|)\right]_1^e=\left(\frac{1}{2}e^2+5\ln e\right)-\left(\frac{1}{2}+5\ln 1\right)=\frac{e^2}{2}+\frac{9}{2}=\frac{e^2+9}{2}$

5) a) $f'(x)=e^{x+1}$ $f'(0)=e\Rightarrow y=ex+c$ $(0|e)$ einsetzen: $\Rightarrow t: y=ex+e$

b) Nullstelle der Tangente: $ex+e=0 \Leftrightarrow x=-1$

$A=\int_{-1}^{0}(ex+e)dx=\left[\frac{1}{2}ex^2+ex\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{2}e+e=\frac{1}{2}e$ FE

6) z. B.: $f(0)=-3$; $g(0)=-1$; $h(0)=0$; $i(0)=\frac{1}{e}$ und somit

(I) $\leftrightarrow g(x)$ (II) $\leftrightarrow i(x)$ (III) $\leftrightarrow h(x)$

Der Funktionsgraph von f geht aus $f(x)=e^x$ hervor durch Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um -2 entlang der y-Achse.

Übungsklausur Exponentialfunktion (Fallschirmspringer)

Lösungen Wahlteil:

a) (1) $v(10) \approx 37{,}5 \Rightarrow \boxed{37{,}5\,\frac{m}{s}}$

(2) Für $t \to \infty$ gilt $v(t) = 60 \cdot \left(1 - \underbrace{e^{-0{,}1t}}_{\to 0}\right) \to 60 \Rightarrow \boxed{60\,\frac{m}{s}}$

(3) $v'(t) = 6\underbrace{e^{-0{,}1t}}_{>0} > 0$ für alle $t \Rightarrow$ v(t) ist streng monoton wachsend.

(4) $a(4) = v'(4) = 4{,}02 \Rightarrow a(4) = \boxed{4{,}02\,\frac{m}{s^2}}$

(5) (Rand-)Extremum von a(t): H(0|6) $\Rightarrow$ maximale Beschleunigung beim Absprung (t = 0) mit $6\,\frac{m}{s^2}$.

b) (1) $v_2(120+10) = v_2(130) = 25{,}23 \Rightarrow \boxed{25{,}23\,\frac{m}{s}}$

(2) Maximale Sinkgeschwindigkeit beim Öffnen des Schirms: $v_2(120) = 60 \Rightarrow \boxed{60\,\frac{m}{s}}$

(3) Mit Schaubild: $v(t) = 50 \Rightarrow t_1 \approx 17{,}5s$

und $v_2(t) = 50 \Leftrightarrow 55 \cdot e^{-0{,}1(t-120)} + 5 = 50 \Leftrightarrow 55 \cdot e^{-0{,}1(t-120)} = 45 \Leftrightarrow -0{,}1(t-120) = \ln(45/55)$

$\Leftrightarrow t - 120 \approx 2 \Rightarrow t_2 \approx 122 \quad \Rightarrow \boxed{\text{Für } 17{,}5s < t < 122s}$

c) $s = \int_0^{60} v(t)dt = \int_0^{60} 60 - 60e^{-0{,}1t}dt = \left[60t + 600e^{-0{,}1t}\right]_0^{60} = 3600 + 600e^{-6} - 600 = 3001{,}5$

$\Rightarrow h(1min) = 8000m - 3001{,}5m = \boxed{4998{,}5m}$